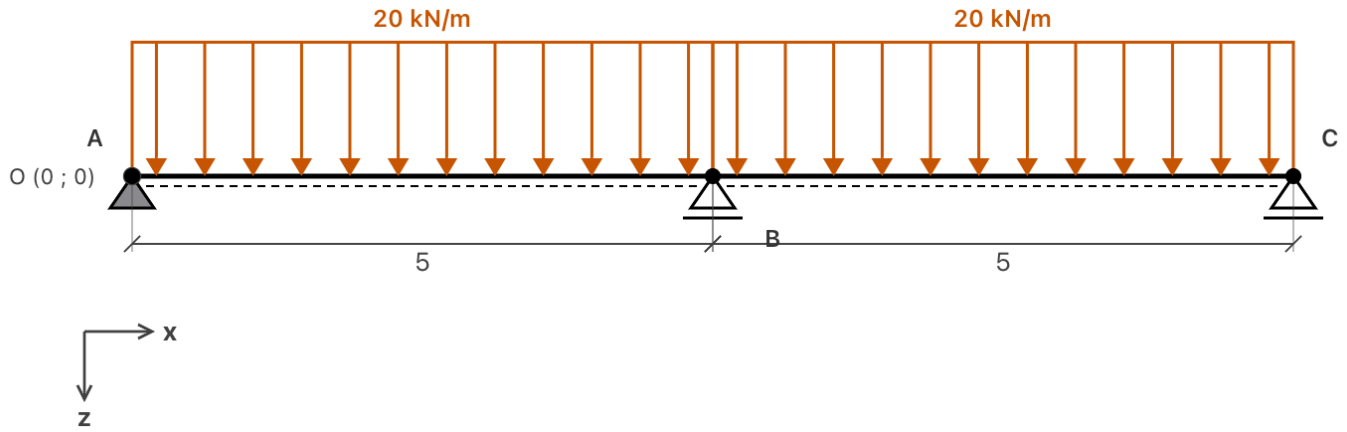
Zweifeldträger

Rahmenberechnung – Lösungsweg · 15. November 2026

Zusammenfassung

Größe	Wert	Stelle
max |M|	62,500 kN·m	A–B, x = 5,000 m
max |Q|	62,500 kN	A–B, x = 5,000 m
größte Auflagerreaktion	125,000 kN	B
Größte Verschiebung |u| eines Punktes	5,568 mm	B–C, x = 2,892 m

1. System



Knoten	x (m)	z (m)	Lager
A	0	0	Festlager
B	5	0	Loslager
C	10	0	Loslager

x, z: globale Achsen, x nach rechts und z nach unten; die Knotenkoordinaten werden in Metern vom Ursprung (0 ; 0) gemessen. Kräfte sind H nach rechts und V nach oben positiv, Momente gegen den Uhrzeigersinn.

Stab	L (m)	Querschnitt	E (GPa)	A (cm²)	I (cm⁴)	Gelenk bei
A–B	5	IPE 270	210	45,9	5790	–
B–C	5	IPE 270	210	45,9	5790	–

2. Belastung

Stab	Art	Wert	Lage ab Stabanfang	Richtung
A–B	Streckenlast	w_1 = 20,000, w_2 = 20,000 kN/m	a = 0,000, b = 5,000 m	α = 90°
B–C	Streckenlast	w_1 = 20,000, w_2 = 20,000 kN/m	a = 0,000, b = 5,000 m	α = 90°

Die Richtung α ist die Seite, von der die Last kommt, von rechts gegen den Uhrzeigersinn gemessen: 90° = von oben (eine abwärts gerichtete Last). Momente sind gegen den Uhrzeigersinn positiv.

3. Grad der statischen Unbestimmtheit

n = 3m – h + r – (3j – g): m Stäbe, h gelenkig angeschlossene Stabenden, r Auflagerreaktionen, j Knoten, g Knoten, die reine Gelenke sind. n = 0: die Gleichgewichtsbedingungen allein reichen aus; n > 0: das System hat n Unbekannte mehr als Gleichungen; n < 0: es ist kinematisch (verschieblich).

$$n = 3 \cdot 2 - 0 + 4 - (3 \cdot 3 - 0) = 1$$

1-fach statisch unbestimmt

4. Auflagerreaktionen

Der Träger ist 1-fach statisch unbestimmt, die Gleichgewichtsbedingungen allein reichen also nicht aus. Kraftgrößenverfahren: die statisch Überzähligen X entfernen, um ein statisch bestimmtes Grundsystem zu erhalten, die Verformung bestimmen, die die Lager nicht zulassen, und X so wählen, dass sie verschwindet (Verträglichkeit). Positives X: vertikale Auflagerkraft nach oben, Einspannmoment gegen den Uhrzeigersinn.

Schritt 1 – Statisch Überzählige und Grundsystem:

$$X1 = \text{vertikale Auflagerkraft B}$$

Das Grundsystem ist der Träger ohne diese Auflagerreaktionen (eine gelöste Einspannung wird zum Gelenklager, ein entferntes vertikales Lager entfällt). Es ist statisch bestimmt.

Schritt 2 – Moment M0(x) des Grundsystems unter der gegebenen Belastung:

$$M0(x) = 100{,}000 \cdot x - 10{,}000 \cdot x^2 \quad A–B,\ 0{,}000 \le x \le 5{,}000\ \text{m}$$

$$M0(x) = 250{,}000 - 10{,}000 \cdot x^2 \quad B–C,\ 0{,}000 \le x \le 5{,}000\ \text{m}$$

Schritt 3 – Momente Mi(x) des Grundsystems unter der Einheitslast Xi = 1 (ohne weitere Lasten):

$$M1(x) = -0{,}500 \cdot x \quad A–B,\ 0{,}000 \le x \le 5{,}000\ \text{m}$$

$$M1(x) = -2{,}500 + 0{,}500 \cdot x \quad B–C,\ 0{,}000 \le x \le 5{,}000\ \text{m}$$

Schritt 4 – Formänderungswerte (Integrale der Produkte der Momentenlinien, EI konstant). δij ist die Verschiebung in Richtung der Überzähligen i infolge Xj = 1, δi0 die infolge der Belastung:

$$EI \cdot \delta ij = \Sigma \int Mi \cdot Mj\, dx \qquad EI \cdot \delta i0 = \Sigma \int Mi \cdot M0\, dx$$

Die Integrale sind die Felder der Integraltafel (Projektmenü → Tabellen): für jeden Abschnitt der Länge s das Feld der beiden Momentenflächen mit ihren Ordinaten i und k.

$$EI \cdot \delta 11 = 1/3 \cdot s \cdot i \cdot k + 1/3 \cdot s \cdot i \cdot k$$

$$= 1/3 \cdot 5{,}000 \cdot (-2{,}500) \cdot (-2{,}500) + 1/3 \cdot 5{,}000 \cdot (-2{,}500) \cdot (-2{,}500) = 20{,}8333$$

$$EI \cdot \delta 10 = -2604{,}1667$$

Verträglichkeit: die Verschiebung in Richtung jeder Überzähligen ist null, Σj δij·Xj + δi0 = 0 (EI kürzt sich heraus):

$$20{,}8333 \cdot X1 - 2604{,}1667 = 0$$

$$X1 = 125{,}000\ \text{kN}$$

EI = 12159,0 kN·m² ist überall gleich und kürzt sich heraus. Die übrigen Auflagerreaktionen folgen durch Superposition, R = R⁰ + Σ Ri·Xi, mit R⁰ aus dem Grundsystem unter der Belastung und Ri aus dem Grundsystem unter Xi = 1:

$$A_V = 100{,}000 - 0{,}500 \cdot 125{,}000 = 37{,}500\ \text{kN}$$

$$C = 100{,}000 - 0{,}500 \cdot 125{,}000 = 37{,}500\ \text{kN}$$

Knoten	H (kN)	V (kN)	M (kN·m)
A	0,000	37,500	0,000
B	0,000	125,000	0,000
C	0,000	37,500	0,000

Kontrolle – auch die Summe der Kräfte und die der Momente um einen zweiten Punkt, C, müssen null sein (jedes Glied mit der Last oder Reaktion, zu der es gehört):

$$\Sigma H = 0 = 0{,}000\ \text{kN}$$

$\Sigma V = -100{,}000\ [q\ A–B] - 100{,}000\ [q\ B–C] + 37{,}500\ [A] + 125{,}000\ [B] + 37{,}500\ [C] = 0{,}000\ kN$

$\Sigma M(C) = 750{,}000\ [q\ A–B] + 250{,}000\ [q\ B–C] - 375{,}000\ [A] - 625{,}000\ [B] = 0{,}000\ kN·m$

Alle drei Summen sind im Rahmen der Rundung null: das System ist im Gleichgewicht.

5. Schnittgrößen an den Stabenden

Lokale Achsen: x verläuft vom ersten zum zweiten Knoten im Stabnamen, z ist x um 90° im Uhrzeigersinn gedreht – die Seite der gestrichelten Faser. N ist als Zug positiv; M ist positiv, wenn es die gestrichelte Faser (+z) dehnt. Werte jeweils unmittelbar innerhalb des Stabes.

Stab	L (m)	Knoten	N	Q	M
A–B	5	A	0,000	37,500	0,000
		B	0,000	−62,500	−62,500
B–C	5	B	0,000	62,500	−62,500
		C	0,000	−37,500	0,000

N, Q in kN; M in kN·m.

6. Schnittgrößenverläufe der Stäbe

Alle am Träger angreifenden Kräfte (Auflagerreaktionen und Lasten) mit ihrer Lage s entlang des Trägers, gemessen ab A. Sie dienen dazu, die Werte am Anfang jedes Stabes zu bestimmen.

Last	s (m)	längs (kN)	quer (kN)	M (kN·m)
A	0,000	0,000	37,500	0,000
B	5,000	0,000	125,000	0,000
C	10,000	0,000	37,500	0,000
q A–B	0,000 … 5,000	0,000 → 0,000	−20,000 → −20,000	kN/m
q B–C	5,000 … 10,000	0,000 → 0,000	−20,000 → −20,000	kN/m

Stab für Stab, jeweils mit eigenem x ($0 \le x \le L$) ab seinem Anfang: zuerst N(0), Q(0), M(0) unmittelbar nach dem Anfang (dort schneiden und alles links davon aufsummieren: N = −Σ Kräfte längs des Stabes, Q = Σ Kräfte quer dazu, M = Σ Kraft·Hebelarm – Kräftepaare), dann für einen Schnitt bei x im Stab N(x) = N(0) − (Längslasten bis x), Q(x) = Q(0) + (Querlasten bis x), M(x) = M(0) + Q(0)·x + (Momente dieser Lasten um den Schnitt). Eine Streckenlast geht mit ihrer Resultierenden ein, sobald der Schnitt hinter ihr liegt, und mit ihrem laufenden Integral, solange der Schnitt in ihr liegt.

Stab A–B (x ab A, $0 \le x \le 5{,}000$ m):

Schnitt unmittelbar nach A, bei s = 0,000 m ab A (Lage entlang des ganzen Trägers):

$N(0) = 0{,}000$

$Q(0) = 37{,}500$

$M(0) = 0{,}000$

$0{,}000\ m \le x \le 5{,}000\ m$

$N(x) = 0$

$Q(x) = 37{,}500 - 20{,}000 \cdot x$

$M(x) = 37{,}500 \cdot x - 10{,}000 \cdot x^2$

Werte an den maßgebenden Stellen (Momentenlinie), mit eingesetzten Zahlen:

$M(1{,}875) = 37{,}500 \cdot 1{,}875 - 10{,}000 \cdot 1{,}875^2 = 35{,}156\ kN·m$

$M(5{,}000) = 37{,}500 \cdot 5{,}000 - 100{,}000 \cdot (5{,}000 - 2{,}500) = -62{,}500\ kN·m$

Stab B–C (x ab B, $0 \le x \le 5{,}000$ m):

Schnitt unmittelbar nach B, bei s = 5,000 m ab A (Lage entlang des ganzen Trägers):

$N(0) = 0{,}000$

$$Q(0) = 37{,}500 + 125{,}000 - 100{,}000 = 62{,}500$$

$$M(0) = 37{,}500 \cdot 5{,}000 - 100{,}000 \cdot (5{,}000 - 2{,}500) = -62{,}500$$

0,000 m ≤ x ≤ 5,000 m

$$N(x) = 0$$

$$Q(x) = 62{,}500 - 20{,}000 \cdot x$$

$$M(x) = -62{,}500 + 62{,}500 \cdot x - 10{,}000 \cdot x^2$$

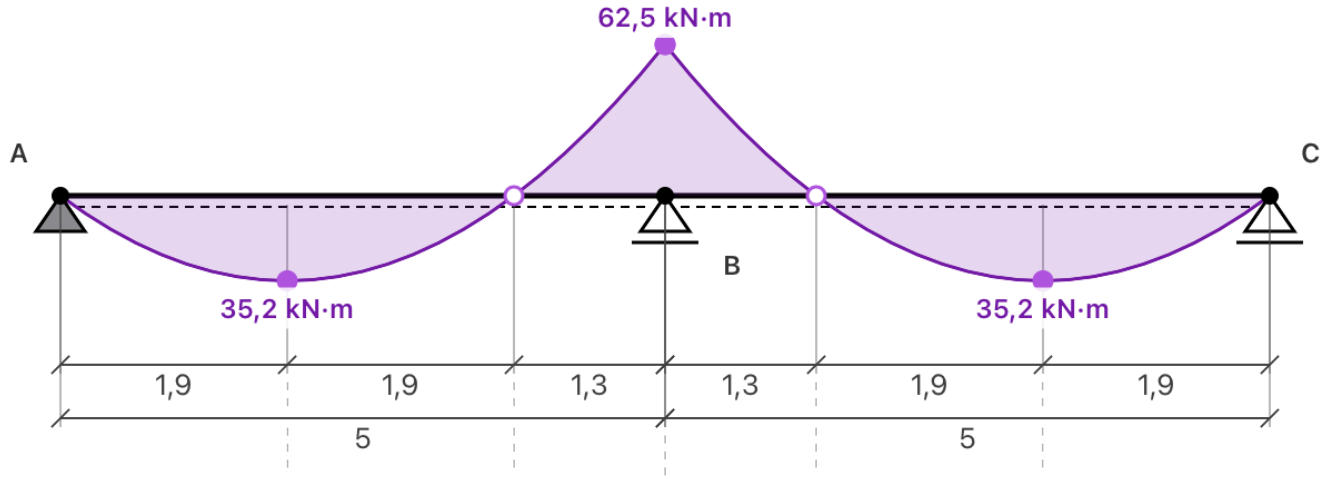
Werte an den maßgebenden Stellen (Momentenlinie), mit eingesetzten Zahlen:

$$M(3{,}125) = -62{,}500 + 62{,}500 \cdot 3{,}125 - 10{,}000 \cdot 3{,}125^2 = 35{,}156 \text{ kN·m}$$

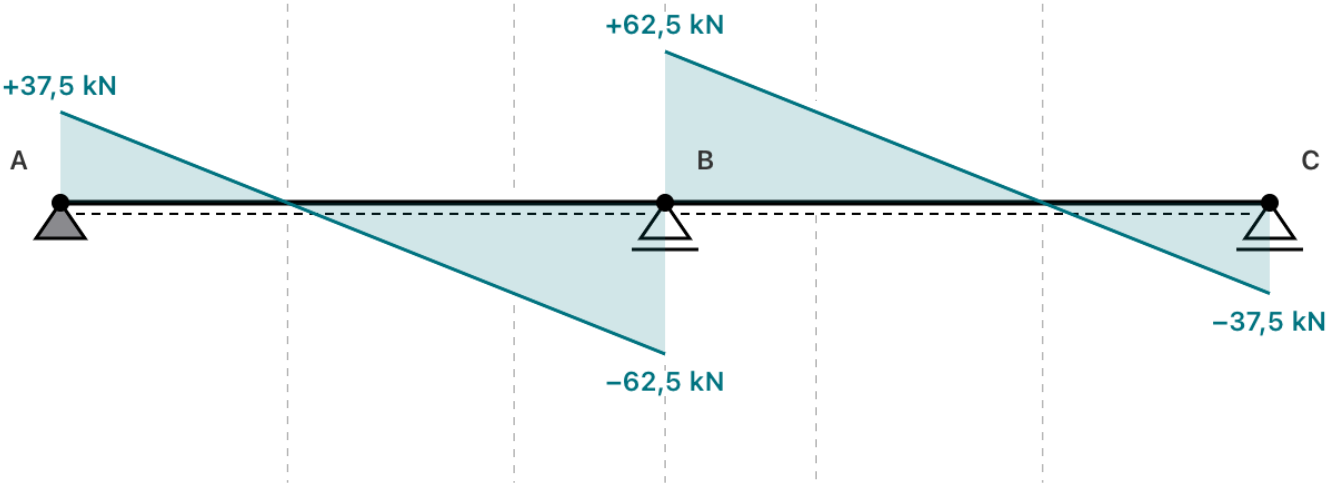
x in m, N und Q in kN, M in kN·m.

7. Zustandslinien

N = 0 in allen Stäben, daher keine Zustandslinie.



Biegemoment M (auf der Zugseite angetragen)



Querkraft Q

Die gestrichelten Linien führen von den Nullstellen und Extremwerten von M durch die Q-Linie(n) nach unten.

8. Nullstellen und Extremwerte von M

Wo die Querkraft Q null ist, hat das Moment M einen Extremwert. Abstände werden entlang des Stabes gemessen.

Stab	Stelle	M (kN·m)	x ab Anfang (m)	x ab Ende (m)
A–B	Maximum M	35,156	1,875	3,125
A–B	M = 0	0	3,750	1,250
A–B	Minimum M	−62,500	5,000	0,000
B–C	Minimum M	−62,500	0,000	5,000
B–C	M = 0	0	1,250	3,750
B–C	Maximum M	35,156	3,125	1,875

9. Verschiebungen und Durchbiegung

Die Verschiebungen folgen aus der Steifigkeitslösung (EI der Querschnitte). Die Durchbiegung f eines Stabes ist der größte Abstand seiner Biegelinie von der Geraden zwischen seinen verschobenen Enden; sie wird mit L/300 verglichen. Die Grenze L/300 ist ein üblicher Wert für die Gebrauchstauglichkeit; welche Grenze gilt, hängt von der Norm und vom Bauteil ab.

Knoten	u_x (mm)	u_z (mm)	θ (mrad)
A	0,000	0,000	−4,284
B	0,000	0,000	0,000
C	0,000	0,000	4,284

Verschiebungen: die Knotenverschiebungen d lösen die Steifigkeitsbeziehung der freien Freiheitsgrade (die Lager halten die übrigen fest).

$$K_{ff} \cdot d_f = F_f \qquad d = (u_x, u_z, \theta) \text{ je Knoten}$$

Durchbiegung eines Stabes: die Biegelinie folgt aus EI·v″ = M, zweimal vom Stabanfang aus integriert; die Konstante ϕ(0) (Drehwinkel der Biegelinie am Anfang gegenüber der lokalen Achse) ergibt sich aus der Verschiebung des Stabendes. v wird senkrecht zum Stab gemessen und ist zur −z-Seite positiv (von der gestrichelten Faser weg; bei einem von links nach rechts gezeichneten Stab nach oben). Ausgeführt für den Stab mit der größten Durchbiegung:

$$EI \cdot v''(x) = M(x)$$

$$v(x) = v(0) + \phi(0)\cdot x + J(x)/EI, \quad J(x) = \int_0^x (x - s)\cdot M(s)\, ds$$

$$\phi(0) = (v(L) - v(0) - J(L)/EI) / L \qquad f = \max |v(x) - [v(0) + (v(L) - v(0))\cdot x/L]|$$

Stab B–C mit Zahlen:

$$c = \cos\alpha = 1{,}0000, \quad s = \sin\alpha = 0{,}0000, \quad L = 5{,}000 \text{ m}$$

$$v(0) = -s\cdot u_{x,B} - c\cdot u_{z,B} = -(0{,}0000)\cdot(0{,}000) - (1{,}0000)\cdot(0{,}000) = 0{,}000 \text{ mm}$$

$$v(L) = -s\cdot u_{x,C} - c\cdot u_{z,C} = -(0{,}0000)\cdot(0{,}000) - (1{,}0000)\cdot(0{,}000) = 0{,}000 \text{ mm}$$

$$EI = 210000000\cdot 5790{,}0\cdot 10^{-8} = 12159{,}0 \text{ kN·m}^2$$

$$J(L) = 0{,}0000 \text{ kN·m}^3 \quad \rightarrow \quad J(L)/EI = 0{,}000 \text{ mm}$$

$$\phi(0) = ((0{,}000) - (0{,}000) - (0{,}000))/5{,}000 = 0{,}000 \text{ mrad}$$

$$x = 2{,}892 \text{ m}: \quad J(x) = -67{,}7015 \text{ kN·m}^3, \quad v(x) = (0{,}000) + (0{,}000 \text{ mrad})\cdot(2{,}892 \text{ m}) + (-5{,}568) = -5{,}568 \text{ mm}$$

$$v_{chord}(x) = (0{,}000) + ((0{,}000) - (0{,}000))\cdot 2{,}892 / 5{,}000 = 0{,}000 \text{ mm}$$

$$f = |(-5{,}568) - (0{,}000)| = 5{,}568 \text{ mm}$$

Längs des Stabes verläuft die Verschiebung u(x) linear zwischen den Endwerten.

Stab	x ab Anfang (m)	f (mm)	L/f	L/300 (mm)	L/300
A–B	2,108	5,568	L/898	16,667	✓
B–C	2,892	5,568	L/898	16,667	✓

10. Spannungen im Querschnitt

Normalspannung σ(z) = N/A + M·z/I_y und Schubspannung τ(z) = Q·S(z)/(I_y·b(z)): z vom Schwerpunkt zur Faser, die ein positives M dehnt (die gestrichelte Faser), S(z) das statische Moment des Querschnittsteils jenseits von z, b(z) seine Breite dort. Berechnet an der Stelle des größten |M| und an der des größten |Q|. Nur zum Lernen: die Spannungen werden nicht mit einer Festigkeit verglichen.

Stab A–B, x = 5,000 m ab A (größtes |M|):

Querschnitt IPE 270: A = 45,9 cm², I_y = 5790 cm⁴, h = 270 mm, W_el,y = 2·I_y/h = 428,9 cm³.

$N = 0{,}000\ \text{kN},\quad Q = -62{,}500\ \text{kN},\quad M = -62{,}500\ \text{kN·m}$

$\sigma = N/A \pm M/W_{el,y} = 0\ \text{N} / 4590\ \text{mm}^2 \pm 6{,}25\cdot10^7\ \text{N·mm} / 428888{,}9\ \text{mm}^3$

$= 0{,}00 \pm 145{,}73\ \text{N/mm}^2$

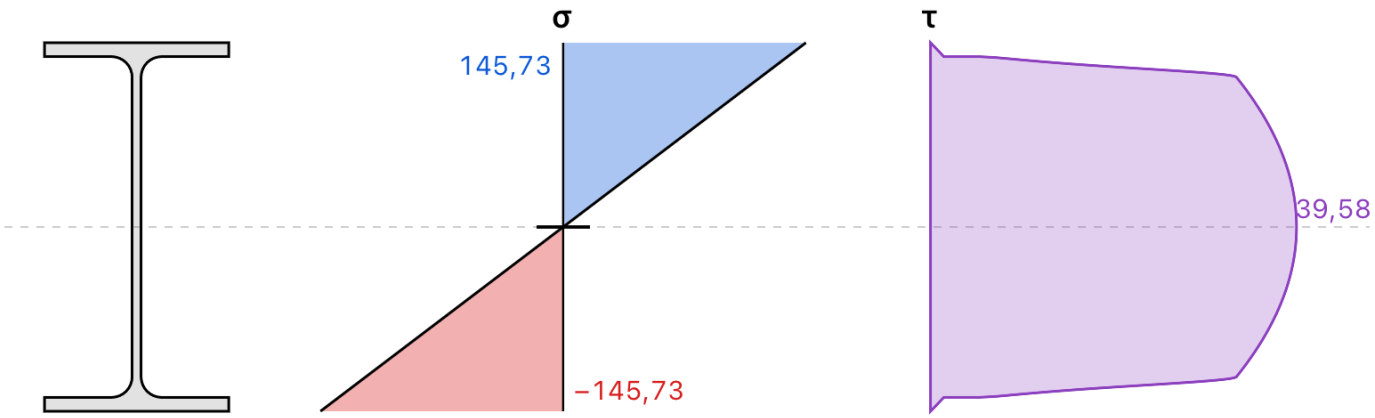
$\sigma(z = -h/2) = 145{,}73\ \text{N/mm}^2,\quad \sigma(z = +h/2) = -145{,}73\ \text{N/mm}^2$

$z_0 = -N\cdot I_y/(A\cdot M) = 0{,}0\ \text{mm}$

$S(0) = \int b(z)\cdot z\,dz = 241998{,}4\ \text{mm}^3$

$\tau_{max} = Q\cdot S/(I_y\cdot b) = 62500\ \text{N} \cdot 241998{,}4\ \text{mm}^3 / (5{,}79\cdot10^7\ \text{mm}^4 \cdot 6{,}6\ \text{mm}) = 39{,}58\ \text{N/mm}^2$

$S_f = b\cdot tf\cdot(h - tf)/2 = 178872{,}3\ \text{mm}^3$: $\tau = 1{,}43\ \text{N/mm}^2$ (b = 135 mm), $5{,}28\ \text{N/mm}^2$ (b = 36,6 mm)



Querschnitt, σ(z) und τ(z) in N/mm² (z im Bild nach unten, von z = −h/2 bis +h/2)

Bei einem Profil aus der Tabelle sind A und I_y die tabellierten Werte der Berechnung; S und b stammen aus den Maßen des Profils mit seinen Ausrundungen.

TrussCalc ist ein Lernwerkzeug für Studierende. Prüfe die Ergebnisse von Hand oder mit anderer Software, bevor du sie für ein reales Tragwerk verwendest. Für die Richtigkeit der Ergebnisse wird keine Gewähr übernommen; für ihre Verwendung ist allein der Nutzer verantwortlich. Der Entwickler haftet unbeschränkt bei Vorsatz und grober Fahrlässigkeit, bei Verletzung des Lebens, des Körpers oder der Gesundheit sowie nach dem Produkthaftungsgesetz. Bei leichter Fahrlässigkeit haftet er nur bei Verletzung einer wesentlichen Vertragspflicht (einer Pflicht, deren Erfüllung die ordnungsgemäße Durchführung des Vertrags überhaupt erst ermöglicht und auf deren Einhaltung der Nutzer regelmäßig vertrauen darf) und nur für den vertragstypischen, vorhersehbaren Schaden; im Übrigen ist die Haftung ausgeschlossen.